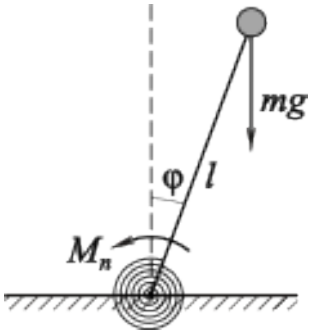
1. Когда спица отклонена от вертикали на угол φ, на нее относительно оси вращения действуют моменты двух сил — силы упругости пружины $M_{\text{п}} = k\varphi$ и силы тяжести $M_{\text{т}} = mgl\sin\varphi$ (см. рисунок). При этом момент силы упругости возвращает ее к вертикальному положению, а момент силы тяжести отклоняет еще дальше от него.



В положении равновесия эти моменты должны уравновешивать друг друга:

$$k\varphi = mgl\sin\varphi.$$

Из этого уравнения видно, что вертикальное положение спицы ($\varphi = 0$) при любых значениях параметров всегда будет положением равновесия. Для его устойчивости необходимо, чтобы при малых отклонениях «возвращающий» момент был больше «отклоняющего»:

$$k\varphi > mgl\sin\varphi.$$

Поскольку при малых φ

$$\sin\varphi \approx \varphi,$$

это неравенство будет выполняться при

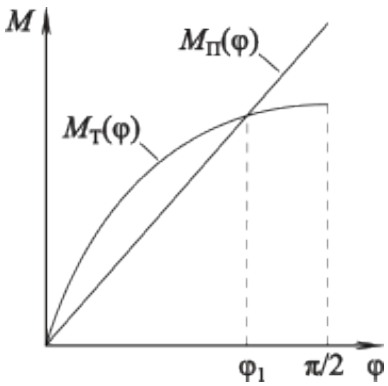
$$k > mgl,$$

то есть при

$$\varepsilon = \frac{k}{mgl} > 1.$$

В обратном случае ($\varepsilon < 1$) вертикальное положение равновесия будет неустойчивым.

Чтобы понять, при каком ε возникнут новые положения равновесия, построим графики зависимостей $M_{\text{п}}(\varphi)$ и $M_{\text{т}}(\varphi)$ на одной и той же координатной плоскости (см. рисунок). Поскольку производная синуса в нуле равна единице, а при увеличении φ монотонно уменьшается, вторая (отличная от нуля) точка пересечения этих зависимостей возникнет, если наклон линейной зависимости $M_{\text{п}}(\varphi)$ будет меньше производной $M_{\text{т}}(\varphi)$ в нуле, то есть



$$k < mgl,$$

что соответствует $\varepsilon < 1$. Соответствующее положение равновесия φ_1 будет устойчивым при любых ε, при которых оно существует: как видно из графиков, если произойдет отклонение от φ_1 в большую сторону, возвращающий момент $M_{\text{п}}(\varphi)$ окажется больше отклоняющего $M_{\text{т}}(\varphi)$ и система вернется в положение равновесия. К аналогичному результату приведет и отклонение в меньшую сторону. Отметим, что мы получили не одно, а два новых положения равновесия

$$\varphi = \pm\varphi_1,$$

поскольку спица может отклоняться как в одну, так и в другую сторону.

Как видно из графиков, при уменьшении ε угол φ_1 будет монотонно возрастать, пока не станет равным $\pi/2$. В этот момент спица ляжет на стол, на нее начнет действовать дополнительная сила (реакции стола), и дальнейшее уменьшение параметра уже не приведет к изменению состояния системы. Это произойдет при значении ε, определяемом условием:

$$M_{\text{п}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = M_{\text{т}}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$
$$k\frac{\pi}{2} = mgl\sin\frac{\pi}{2},$$
$$\varepsilon = \frac{k}{mgl} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64.$$

Значит, при $\varepsilon < 0{,}64$ остаются два положения равновесия$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, которые, очевидно, являются устойчивыми.

Подведем итог:

- при любом значении параметра ε у системы существует положение равновесия $\varphi = 0$. Оно устойчиво при $\varepsilon > 1$ и неустойчиво при $\varepsilon < 1$;

- при $0{,}64 < \varepsilon < 1$ возникают еще два положения равновесия $\varphi = \pm\varphi_1$ $(0 < \varphi_1 < \pi/2)$, они являются устойчивыми;

- наконец, при $\varepsilon < 0{,}64$ спица ложится на стол и находится в одном из устойчивых положений равновесия $\varphi = \pm\pi/2$.

2. а) Если сила тяжести отсутствует, то вся энергия газа — это его внутренняя энергия $U = \frac{3}{2}RT$ (газ одноатомный). Для увеличения его температуры на ΔT ему нужно передать количество теплоты, равное (по Первому началу термодинамики) $\Delta Q = \Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T$, — никакой работы газ не совершает. Его теплоемкость тогда равна

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{3}{2}R.$$

б) Наличие силы тяжести приведет к тому, что газ в сосуде станет неоднородным — его плотность внизу (у дна сосуда) будет максимальной, с увеличением высоты она будет уменьшаться, на самом верху (под крышкой сосуда) будет минимальной. В этом случае в полную энергию газа войдет также его потенциальная энергия в поле тяжести Земли $E_{\text{П}} = Mgh$. Здесь M — масса газа (равная в нашем случае молярной массе), h — высота его центра тяжести над дном сосуда. Для оценки будем считать, что эта высота равна максимальной высоте, на которую могут подняться молекулы газа, обладающие средней кинетической энергией теплового движения. По закону сохранения энергии тогда

$$mgh \sim kT,$$

где m — масса молекулы,

$$k = \frac{R}{N_A}$$

— постоянная Больцмана. Отсюда

$$h \sim \frac{kT}{mg} = \frac{RT}{Mg}.$$

Мы подставили выражение для постоянной Больцмана и учли, что

$$mN_A = M.$$

Значит, потенциальная энергия газа

$$E_{\text{П}} = Mgh \sim RT,$$

а связанная с ней поправка к его теплоемкости

$$\Delta C = \frac{\Delta E_{\text{П}}}{\Delta T} \sim R.$$

Как видим, эта поправка сравнима с теплоемкостью газа C, которую он имеет в отсутствие силы тяжести.

в) Оценим численное значение найденной нами высоты центра тяжести газа. Температуру для оценки примем равной 300 К. Имеем:

$$h \sim \frac{RT}{Mg} = \frac{8{,}31\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}\cdot 300\,\text{К}}{0{,}004\,\dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}\cdot 9{,}8\,\text{м/с}^2} \approx 60\,\text{км}.$$

Как видим, при такой температуре тепловое движение способно «забросить» молекулы гелия на высоту в несколько десятков километров! Понятно, к чему это приведет, если высота сосуда будет всего лишь 1 м. Тепловое движение перемешает газ так, что он станет почти однородным. Его плотность наверху сосуда будет лишь немного меньше, чем внизу. Высота центра тяжести h окажется почти равна половине высоты сосуда — чуть-чуть меньше. При изменении температуры эта высота будет меняться очень слабо. Соответствующие изменения $E_{\text{П}}$ будут много меньше изменений внутренней энергии газа U, и поправка к теплоемкости окажется мала по сравнению с самой теплоемкостью газа:

$$\Delta C \ll C.$$

3. Пусть нерелятивистская частица с массой покоя m_0, зарядом q и скоростью $v \ll c$ влетает в однородное магнитное поле индукции B. Скорость частицы перпендикулярна магнитному полю. Тогда на нее действует сила Лоренца

$$F_{\text{Л}} = qvB,$$

направленная перпендикулярно v и B. Записав для частицы II закон Ньютона:

$$m_0\frac{v^2}{R} = qvB,$$

найдем из него радиус циклотронной окружности, по которой она будет двигаться:

$$R = \frac{m_0 v}{qB}. \tag{1}$$

Если же наша частица релятивистская ($v \sim c$), то массу покоя в этой формуле нужно заменить на зависящую от скорости массу $m(v)$:

$$R = \frac{m(v)v}{qB} = \frac{Ev}{c^2qB}. \tag{2}$$

Мы выразили массу частицы через ее полную релятивистскую энергию E.
а) На входе в главное кольцо LHC протоны имеют энергию $E_1 = 450\,\text{ГэВ}$, на выходе $E_2 = 7\,\text{ТэВ}$. Обе эти энергии много больше энергии покоя протона

$$E_0 = m_0c^2 \approx 1\,\text{ГэВ}.$$

Это означает, что частицы даже на входе в ускоритель являются ультрарелятивистскими — их скорость мало отличается от скорости света: $v \approx c$. Тогда в релятивистской формуле (2) можно положить $v = c$. Выразив из нее индукцию поля B и учтя, что циклотронный радиус R должен оставаться неизменным (он равен радиусу кольца), находим отношение магнитных полей в начале и в конце разгона:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{E_2}{E_1} \approx 15{,}6.$$

б) Ускоритель Linac 2 сообщает протонам энергию $\Delta E = 50\,\text{МэВ}$. Эта энергия, как видим, много меньше энергии покоя этих частиц E_0. Значит, на вход в главное кольцо LHC в этом случае поступают нерелятивистские частицы — их скорость $v \ll c$. А саму эту скорость можно найти, приравняв ΔE нерелятивистской кинетической энергии протона:

$$\Delta E = \frac{m_0v^2}{2}.$$

Выразив отсюда v и подставив ее в нерелятивистскую формулу (1), получим выражение для начального магнитного поля, необходимого для движения частиц по кольцу ускорителя:

$$B_1 = \frac{\sqrt{2m_0\Delta E}}{qR} = \frac{\sqrt{2E_0\Delta E}}{qRc}.$$

Магнитное поле в конце разгона найдем, как и в предыдущем пункте, из релятивистской формулы (2) (скорость протонов к этому моменту $v \approx c$):

$$B_2 = \frac{E_2}{qRc}.$$

Отношение этих полей

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{E_2}{\sqrt{2E_0\Delta E}} \approx 22\,140.$$

4. Даже бесконечный лазерный луч при наблюдении сбоку всегда будет выглядеть как отрезок конечной длины. Посмотрим на рисунок 1. На нем AB — луч света, излучаемый лазером, расположенным в точке A. В точке C находится наблюдатель — на рисунке показан его глаз. Рассеянный воздухом свет приходит к нему из разных точек луча AB

(A_1, A_2 и т.д.) по лучам A_iC. Из рисунка видно, что по мере удаления точки рассеяния угол φ, под которым она видна к направлению лазерного луча, уменьшается и стремится к нулю — свет, приходящий из «бесконечно удаленной» точки A_∞, идет по лучу $A_\infty C$, параллельному AB. Это значит, что весь бесконечный лазерный луч будет выглядеть для наблюдателя как отрезок конечного углового размера — все его точки будут видны под углами от $\varphi_0 = \pi/2$ до $\varphi_\infty = 0$.

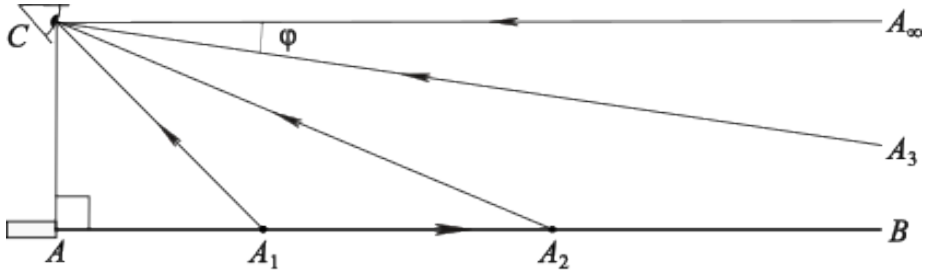


Рис. 1

Постоянная (во всяком случае, на глаз) яркость этого отрезка — самая загадочная особенность данного явления. Если говорить о ближних частях лазерного луча, то плавное изменение их яркости мы можем и не заметить. Наш глаз так устроен, что два источника света, от одного из которых к нему приходит в два раза больше энергии в единицу времени, чем от другого, он будет воспринимать как источники примерно одинаковой яркости. Но почему эта яркость остается неизменной для удаленных участков лазерного луча, которые видны вблизи предельной точки A_∞, — совершенно непонятно. Ведь расстояние до этих участков стремится к бесконечности, их яркость уже по этой причине должна стремиться к нулю, и это невозможно не заметить! Однако такого не наблюдается.

Для объяснения этого факта вычислим количество световой энергии, приходящей к наблюдателю от участка лазерного луча единичного углового размера. Обозначим расстояние от глаза наблюдателя до лазера через d. Рассмотрим участок луча, ближняя точка которого видна под углом φ, а дальняя — под углом $\varphi - \Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — малый угол (см. рисунок 2).

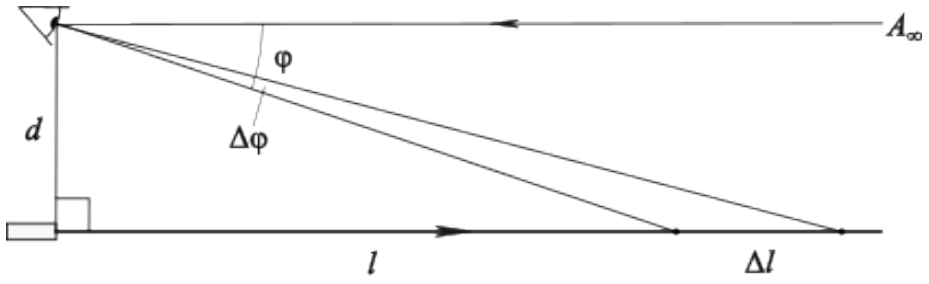


Рис. 2

Если участок удаленный, то φ тоже является малым. Расстояние от лазера до нашего участка l тогда связано с φ соотношением

$$l = \frac{d}{\operatorname{tg}\varphi} \approx \frac{d}{\varphi}, \qquad \varphi \approx \frac{d}{l}.$$

Длину участка Δl можно найти, умножив производную функции $l(\varphi)$ на приращение ее аргумента $-\Delta\varphi$:

$$\Delta l = l'(\varphi)(-\Delta\varphi) = -\frac{d}{\varphi^2}(-\Delta\varphi) = \frac{l^2}{d}\Delta\varphi.$$

Светимость этого участка ΔS (количество энергии, рассеиваемой им в единицу времени), очевидно, пропорциональна его длине:

$$\Delta S \sim \Delta l \sim l^2\Delta\varphi.$$

Будем считать, что рэлеевское рассеяние происходит изотропно — одинаково во все стороны (это не совсем правда, но как первое приближение годится). Плотность потока световой энергии ΔI, излучаемой нашим участком, с увеличением расстояния R от него должна падать как $1/R^2$:

$$\Delta I = \frac{\Delta S}{4\pi R^2} \sim \frac{\Delta S}{R^2} \approx \frac{\Delta S}{l^2} \sim \Delta\varphi.$$

Смотрите, l^2 в последней формуле сократилось! Это означает, что плотность потока энергии, приходящей к наблюдателю от различных участков луча, определяется только угловым размером этих участков и не зависит от расстояния до них! Тогда количество энергии ΔE, поступающей в глаз наблюдателя от участка единичного углового размера:

$$\frac{\Delta E}{\Delta\varphi} \sim \frac{\Delta I}{\Delta\varphi} = \text{const},$$

что и означает постоянство видимой яркости луча по всей его длине.

Учтем теперь, что лазерный луч на самом деле не является бесконечным. Точнее, его видимая часть продолжается только до границ земной атмосферы — в космическом вакууме никакого рассеяния света не происходит. Сильно ли это повлияет на наблюдаемую картину? Сделаем оценку. Толщина плотных слоев атмосферы, способных заметно рассеивать свет, — порядка 40 км. Но если светить не вертикально вверх, а просто под некоторым углом к горизонту (как на фотографии), то луч пройдет в этих слоях гораздо большее расстояние. Для оценки примем его равным $L \sim 100$ км. Пусть наблюдатель располагается на расстоянии $d \sim 1$ м от лазера. Тогда, как видно из предыдущих рисунков, он увидит конец лазерного луча под углом

$$\varphi \sim \frac{d}{L}$$

к его направлению (для бесконечного луча этот угол, как мы показали, равен нулю). Подставив числа, получаем:

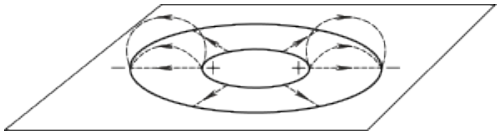
$$\varphi \sim 10^{-5}\,\text{рад} \sim 5 \times 10^{-4}\,\text{град}.$$

Конечность земной атмосферы приводит к тому, что наш луч теряет на самом конце несколько десятитысячных градуса своего углового размера. На глаз такую потерю заметить практически невозможно.

5. а) Пусть двумерная сфера радиуса R лежит в подпространстве $(x, y, z, 0)$ четырехмерного пространства (x, y, z, u), ее центр находится в начале координат. Начнем наш путь из этого центра — точки с координатами $(0, 0, 0, 0)$. Сначала увеличим координату u от 0 до некоторого $u_0 > 0$ (не изменяя остальные координаты). Затем увеличим координату x от нуля до $2R$. После этого уменьшим u от u_0 до 0. Получится буква «П» из трех отрезков, торчащая в четвертое измерение:

$$(0, 0, 0, 0) \to (0, 0, 0, u_0) \to (2R, 0, 0, u_0) \to (2R, 0, 0, 0).$$

Этот путь очевидно непрерывен, он начинается внутри нашей сферы и заканчивается в том же трехмерном подпространстве снаружи от нее. С другой стороны, он не имеет с этой сферой ни одной общей точки: все точки сферы имеют координату $u = 0$, а для всех точек построенного пути (кроме первой и последней) значение этой координаты больше нуля.



б) Двигатель, разумеется, работать не будет. Описанный в задаче конденсатор из двумерных сфер в четырехмерном пространстве, как ни удивительно, будет создавать краевое поле — в четвертом измерении. Это тесно связано с тем фактом, что двумерная сфера в таком пространстве не является разделяющей поверхностью. Вернемся к аналогии пониженной размерности. Рассмотрим плоский сферический конденсатор. Его обкладки — два концентрических кольца, лежащие в одной плоскости. Если такой конденсатор зарядить, возникнет электрическое поле, направленное от одного кольца к другому. И оно будет лежать не только в плоскости колец, но и во всем трехмерном пространстве (см. рисунок). Попытка через третье измерение обойти зазор между этими кольцами приведет к тому, что краевое поле такого конденсатора на этом обходе совершит отрицательную работу, в точности равную (по модулю) работе на проходе через зазор по плоскости. Получить ненулевую работу поля на замкнутом пути не получится. По такой же причине ее не удастся получить и в описанной в задаче конструкции.