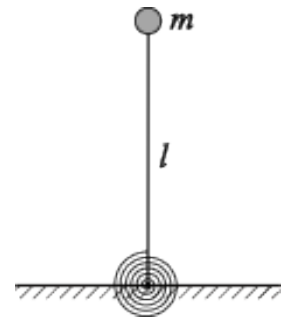


### Задача 1.

На конце тонкой легкой спицы длины  $l$  закреплен небольшой шарик массы  $m$ . Другой конец спицы прикреплен к оси, расположенной на поверхности горизонтального стола (спица может поворачиваться вокруг этой точки). К спице прикреплена спиральная пружина, которая при отклонении спицы от вертикали на угол  $\varphi$  действует на нее возвращающим моментом  $M = k\varphi$ .

Какие положения равновесия возможны у этой системы при разных значениях безразмерного параметра  $\varepsilon = \frac{k}{mgl}$ ?

Устойчивы или неустойчивы эти положения равновесия?



**Пояснение.** Решение этой задачи приводит к трансцендентным уравнениям. Находить их корни, разумеется, не нужно (это можно сделать только численно). Надо с помощью графиков показать, при каких значениях параметра эти корни возникают и исчезают, как они изменяются при изменении  $\varepsilon$ , а также проанализировать устойчивость соответствующих положений равновесия.

### Задача 2.

Очень высокий (несколько десятков километров высотой) замкнутый цилиндрический сосуд расположен вертикально. В нем находится 1 моль гелия. Газ разреженный, может считаться идеальным.

- Найдите теплоемкость, которой обладал бы этот газ, если бы сила тяжести отсутствовала. Ответ запишите через универсальную газовую постоянную  $R$ .
- Оцените поправку к теплоемкости этого газа, которая возникает из-за наличия силы тяжести. Является ли эта поправка малой или сравнимой с теплоемкостью, найденной в пункте а)?
- Почему простое рассуждение, дающее оценку поправки в пункте б), перестанет работать, если сосуд будет невысоким (высотой, например, в 1 метр)? Что можно сказать про величину поправки к теплоемкости в этом случае?

### Задача 3.

Большой адронный коллайдер (ЛHC) разгоняет протоны до энергии 7 ТэВ (при этом используется несколько ступеней предварительного ускорения) в тонком кольцевом канале. Радиус этого кольца приблизительно 4,25 км. Для того, чтобы разгоняемые частицы «заворачивали» по этому радиусу, а не врезались в стенку канала, вдоль всего кольца расположены сверхпроводящие электромагниты, магнитное поле которых перпендикулярно плоскости кольца.

- а) Во сколько раз должно изменяться магнитное поле этих электромагнитов за время разгона протонов до максимальной энергии? В главное кольцо ЛHC частицы поступают из предварительного ускорителя SPS, разгоняющего их до энергии 450 ГэВ. Энергия покоя протона  $m_0c^2 \approx 1$  ГэВ.
- б) Во сколько раз пришлось бы изменять магнитное поле, если бы протоны поступали в главное кольцо сразу после первой ступени предварительного ускорения – линейного ускорителя Linac 2? Этот ускоритель сообщает частицам энергию 50 МэВ.

**Указание.** Как показывает Специальная теория относительности, отличие релятивистской динамики от нерелятивистской (ньютоновской) в простейших случаях может быть описано так: при разгоне до скорости, сравнимой со скоростью света в вакууме  $c$ , частица как бы становится тяжелее – во всех нерелятивистских динамических уравнениях ее массу покоя  $m_0$  нужно заменить на зависящую от скорости  $v$  массу  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  и эти уравнения окажутся верными и в релятивистском случае. СТО также показывает, что полная (учитывающая энергию покоя) релятивистская энергия частицы равна  $E = m(v)c^2 = \frac{(m_0c^2)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ .

### Задача 4.

На фотографии показан луч лазерной указки, направленной в ночное безоблачное небо. Этот луч выглядит как отрезок конечной длины и практически одинаковой во всех точках яркости. Почему? Если его длина действительно конечна, то на каком расстоянии от нас он обрывается и по какой причине? Если же вы считаете, что так и должен выглядеть весь лазерный луч (уходящий в бесконечность) – объясните, почему он виден как отрезок конечного размера. И почему его яркость постоянна? Ведь ближайшие к «концу» этого отрезка точки находятся от нас на огромном расстоянии – по сравнению с расстоянием до ближайших точек. Сильно ли влияет на видимый угловой размер луча конечность земной атмосферы?



**Указание.** Увидеть лазерный луч «сбоку» возможно, разумеется, только за счет рассеяния света в среде, через которую он проходит. Если воздух насыщен частицами пыли или дыма, это рассеяние происходит очень интенсивно и луч виден как яркая линия даже

днем. Однако и в абсолютно чистом воздухе этот луч можно увидеть – за счет рассеяния света на микроскопических случайных колебаниях плотности воздуха (флуктуациях). Такое рассеяние называется рэлеевским, именно из-за него небо днем является светлым (голубым – потому, что этот механизм рассеивает коротковолновый свет гораздо сильнее, чем длинноволновый). Рэлеевское рассеяние очень слабое, поэтому увидеть луч в чистом воздухе можно только в темноте (ночью). На приведенной в задаче фотографии почти наверняка запечатлен именно этот случай рассеяния.

### Задача 5.

Представим себе заряженный плоский конденсатор. Если расстояние между его обкладками мало по сравнению с их размерами, электрическое поле такой системы почти полностью находится у нее внутри (между обкладками). Вблизи краев конденсатора оно, конечно, выходит наружу, но очень недалеко и быстро убывает с удалением от края. Предлагается следующая идея вечного двигателя. Прорежем в обкладках конденсатора два отверстия (друг напротив друга) и перенесем положительный точечный заряд по замкнутому пути, показанному на рис. 1 пунктиром. На той части пути, которая проходит внутри конденсатора, электрическое поле совершит над нашим зарядом положительную работу. А остальная часть проходит вне конденсатора, электрического поля там нет и никакая работа совершаться не будет. Повторяя этот процесс много раз, можно получить сколь угодно большую работу и использовать ее в каких-нибудь полезных целях – например, для вращения динамо-машины, вырабатывающей электрический ток. При этом в самом конденсаторе ничего расходоваться не будет – заряды на его обкладках стоят неподвижно и никакой энергии на создание электрического поля не тратят. Все энергетические проблемы человечества будут решены раз и навсегда!

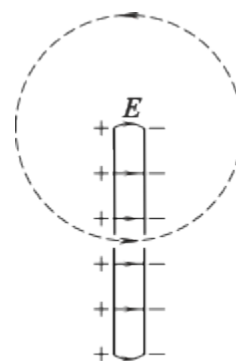


Рис. 1

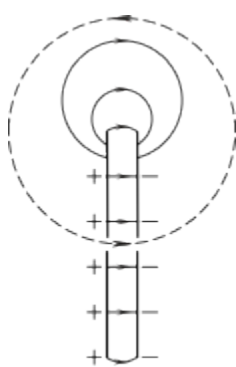


Рис. 2

Будет ли работать этот вечный двигатель? Разумеется, нет. И причина этого – краевое поле конденсатора. Как видно из рис. 2, на «возвратной» (проходящей снаружи конденсатора) части нашего пути это поле направлено против движения заряда, а значит, совершает над ним отрицательную работу. Да, это поле слабое (намного слабее поля внутри конденсатора), однако длина пути в обход края намного больше, чем длина отрезка, который наш заряд проходит внутри конденсатора. И чем дальше вы отведете «возвратный» путь от края (чтобы он оказался в области совсем уже слабого краевого поля) тем больше окажется длина этого пути! А отрицательная работа краевого поля всегда будет такой, что полностью скомпенсирует положительную работу поля внутри конденсатора, так что полная работа окажется равной нулю. Почему? Потому что электростатическое поле обладает фундаментальным свойством – потенциальностью. Свойство это как раз и состоит в том, что работа этого поля на любом замкнутом пути всегда равна нулю. Это можно доказать в совершенно общем случае. Обмануть закон сохранения энергии таким способом, увы, не получится.

**Однако!** Есть ведь и другая конструкция – сферический конденсатор. Его обкладки – две концентрические сферы разных радиусов. Если такой конденсатор зарядить, он будет создавать электрическое поле (радиальное) только в зазоре между обкладками. Ни внутри меньшей сферы, ни снаружи от большей электрического поля не будет. Не будет и никакого краевого поля – просто потому, что у этого конденсатора нет края! Значит, если мы пройдем по радиальному отрезку АВ между обкладками (см. рис. 3), а потом сумеем как-нибудь вернуться в точку А не проходя еще раз между ними, у нас возникнет замкнутый путь с ненулевой работой поля!

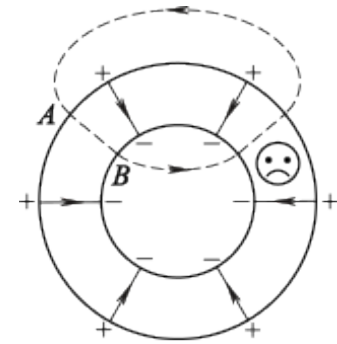


Рис. 3

Увы, сделать это, конечно, не получится. Сфера является разделяющей поверхностью – она делит пространство на две части (внешнюю и внутреннюю), причем так, что пройти из одной части в другую не пересекая эту поверхность невозможно. Если мы оказались внутри сферического конденсатора, то, чтобы выйти наружу и вернуться к началу нашего пути, нам придется еще раз пересечь зазор между сферами, причем в обратном направлении. При этом мы, двигаясь против электрического поля, потеряем весь энергетический выигрыш, полученный при первом пересечении. Печаль.

**Однако!** Двумерная сфера\* является разделяющей поверхностью только если она находится в трехмерном пространстве. Если же ее поместить в четырехмерное пространство – она этого свойства лишится. Используя четвертое измерение, можно легко выйти изнутри такой сферы наружу и при этом ни разу ее не пересечь. Это легко понять с помощью аналогии пониженной размерности. Представим себе окружность, нарисованную на плоскости (рис. 4). Если двигаться только по плоскости (в двух измерениях), то выйти изнутри этой окружности наружу не пересекая ее, разумеется, невозможно. А используя третье измерение это можно сделать без всяких проблем! (Пунктирная дуга на рис. 4) Если эта аналогия не убеждает, можно в явном виде указать (описать в координатах) непрерывный путь в четырехмерном пространстве, соединяющий точки внутри и снаружи двумерной сферы и не пересекающий эту сферу ни в одной точке (см. задание а)). Значит, используя такой путь, мы сможем вернуться из точки В в точку А (возвращаемся к нашему сферическому конденсатору) через четвертое измерение и при этом ни разу не пересечь обкладки и зазор между ними с его злобным электрическим полем. Тогда мы наконец получим замкнутый путь, на котором работа электрического поля будет отлична от нуля. Вечный двигатель будет построен!

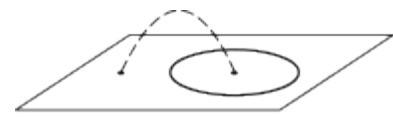


Рис. 4

\*Обратите внимание – двумерной математика называет привычную нам сферу, то есть множество точек, равноудаленных от центра и лежащих в трехмерном пространстве. Такая поверхность действительно двумерна. А вот поместить ее можно в любое пространство размерности 3 или большей.

Здесь, правда, нужно сделать одно замечание. Как показывает серьезная наука, пространственно-четырёхмерная электродинамика несколько отличается от привычной нам трёхмерной. Однако в электростатике отличие, на самом деле, минимально. Оно состоит только в том, что закон Кулона в четырёхмерном пространстве должен быть другим – сила взаимодействия двух зарядов должна убывать обратно пропорционально кубу расстояния между ними. Это нужно для того, чтобы выполнялась четырёхмерная теорема Гаусса. Можно показать, что из-за такого устройства поля точечного заряда в четырёхмерии заряженный сферический конденсатор (из двумерных сфер) будет создавать электрическое поле и внутри, и снаружи, а не только в зазоре между обкладками. Но для наших рассуждений это, как легко заметить, неважно – наш путь использует только отрезок АВ, лежащий между обкладками, а остальная его часть проходит в четвертом измерении.

- а)** Постройте в явном виде (опишите в координатах  $x, y, z, u$ ) непрерывный путь, соединяющий точку внутри двумерной сферы с точкой вне ее, но при этом не имеющий с ней ни одной общей точки. Сфера лежит в трёхмерном подпространстве  $(x, y, z)$  четырёхмерного пространства  $(x, y, z, u)$ , ее центр находится в начале координат, ее радиус  $R$ .
- б)** Так будет ли работать описанный в задаче электростатический вечный двигатель в четырёхмерном пространстве? Если нет – объясните, почему (укажите ошибку в приведенных рассуждениях). Ссылки на закон сохранения энергии здесь совершенно недостаточно!