

Заключительный этап ТурЛома-2026

Задача 1.

Действительные числа a , b и c не меньше 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a+\frac{b}{c}} + \frac{1}{1+b+\frac{c}{a}} + \frac{1}{1+c+\frac{a}{b}} \leq 1.$$

Решение:

Заметим, что

$$\frac{1}{1+a+\frac{b}{c}} = \frac{c}{c+ac+b} \leq \frac{c}{a+b+c}.$$

Складывая это и ещё два аналогичных неравенства, получаем

$$\frac{1}{1+a+\frac{b}{c}} + \frac{1}{1+b+\frac{c}{a}} + \frac{1}{1+c+\frac{a}{b}} \leq \frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1,$$

что и требовалось.

Задача 2.

Дан треугольник ABC . На стороне BC отмечена её середина M . На сторонах AB и AC выбраны точки P и Q соответственно так, что

$$\angle PMB = \angle QMC = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Найдите длину отрезка BP , если $AP = 1$, $AQ = 3$, а $BC = 8$.

Ответ. $\sqrt{17} - 1$

Решение:

Заметим, что

$$\angle PMQ = 180^\circ - \angle PMB - \angle QMC = 180^\circ - \angle BAC,$$

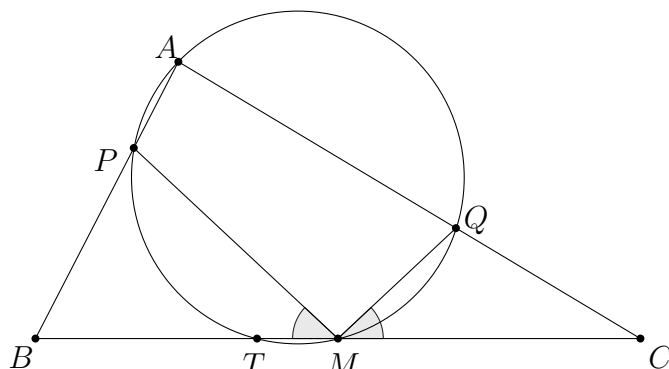
т.е. в четырёхугольнике $APMQ$ сумма двух противоположных углов равна 180° , значит он вписанный и

$$\angle BPM = 180^\circ - \angle APM = \angle AQM = 180^\circ - \angle MQC.$$

Поэтому по теореме синусов для треугольников BPM и MQC

$$BP = \frac{BM \cdot \sin \angle PMB}{\sin \angle BPM} = \frac{CM \cdot \sin \angle MQC}{\sin \angle CMQ} = CQ,$$

(во втором равенстве мы воспользовались тем, что $BM = CM$, $\angle PMB = \angle QMC$ и $\angle BPM = 180^\circ - \angle MQC$).



Пусть $x = BP = AQ$, а окружность $(APMQ)$ вторично пересекает BC в точке T (возможно, $T = M$, если окружность $(APMQ)$ касается отрезка BC). Тогда по теореме о двух секущих

$$\begin{aligned} BP \cdot BA &= BT \cdot BM, & CQ \cdot CA &= CT \cdot CM, \\ x(x+1) &= BT \cdot 4, & x(x+3) &= T \cdot 4, \\ x(x+1) + x(x+3) &= (BT + CT) \cdot 4 = BC \cdot 4 = 32, \end{aligned}$$

откуда $2x^2 + 4x = 32$. Решая квадратное уравнение, с учётом $x > 0$, получаем $x = \sqrt{17} - 1$.

Задача 3.

В круговом турнире участвуют n игроков: каждый играет с каждым ровно один раз, и в каждом матче один игрок выигрывает, а другой проигрывает. Если игрок A победил игрока B , будем называть B жертвой игрока A .

По окончании турнира каждый игрок подсчитывает суммарное число поражений, которые в турнире потерпели все его жертвы. Пусть q — среднее значение этой суммы по всем игрокам.

Докажите, что существует игрок, у которого не более $[\sqrt{q}]$ побед. Как обычно, для действительного числа x через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x .

Решение:

Пусть P_k — k -й игрок, имеющий d_k поражений, и пусть $S = nq$. Так как P_k является жертвой ровно d_k игроков, вклад игрока P_k в сумму S равен d_k^2 . Следовательно,

$$nq = S = \sum_{k=1}^n d_k^2.$$

У игрока P_k число побед равно $n - 1 - d_k$. Предположим противное, т.е. $n - 1 - d_k > [\sqrt{q}]$ для всех k . Тогда $(n - 1 - d_k)^2 > q$ для всех k , то есть

$$d_k^2 > q + 2(n - 1)d_k - (n - 1)^2 \quad \text{для всех } k.$$

Так как $\sum_{k=1}^n d_k = \frac{n(n-1)}{2}$, то, суммируя по k , получаем

$$S > nq + 2(n - 1) \cdot \frac{n(n - 1)}{2} - n(n - 1)^2 = nq,$$

противоречие с $S = nq$.

Задача 4.

На доске исходно записаны числа $1, 2, \dots, 2100$. За одно действие Жора выбирает два числа a и b на доске такие, что ни одно из них не делится на другое, стирает их и вместо них записывает $\text{НОД}(a, b)$ и $\text{НОК}(a, b)$. Когда подходящей пары чисел на доске больше не оказалось, Жора закончил. После этого он выписал все полученные числа в порядке неубывания:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2100}.$$

Найдите, чему может быть равно количество натуральных делителей числа a_{2026} .

Ответ. Только 3840 — количество делителей числа $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$.

Решение. Пусть $p < 2100$ — простое, а $\nu_p(n)$ — показатель простого p в разложении n (то есть наибольшее k , такое что np^k). При замене двух чисел a, b на $\text{НОД}(a, b)$ и $\text{НОК}(a, b)$ имеем

$$\nu_p(\text{НОД}(a, b)) = \min(\nu_p(a), \nu_p(b)), \quad \nu_p(\text{НОК}(a, b)) = \max(\nu_p(a), \nu_p(b)).$$

Значит, для каждого простого p мультимножество значений ν_p на доске *не меняется* (пара значений просто заменяется на их \min и \max).

Когда процесс останавливается, на доске уже нельзя найти пару a_i, a_{i+1} такую, что ни одно не делится на другое; значит, после упорядочивания

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2100}$$

выполнено $a_{i+1} \mid a_i$ для всех i . Тогда для каждого простого p последовательность показателей

$$\nu_p(a_1) \leq \nu_p(a_2) \leq \dots \leq \nu_p(a_{2100})$$

неубывающая, а её мультимножество такое же, как в начале (для чисел $1, 2, \dots, 2100$). Следовательно, для каждого p она совпадает с начальными значениями $\nu_p(1), \nu_p(2), \dots, \nu_p(2100)$, упорядоченными по неубыванию.

Найдём a_{2026} (это 75-е по величине число с конца, поскольку $2100 - 2026 + 1 = 75$). Для фиксированных p^k имеем $p^k \mid a_{2026}$ тогда и только тогда, когда среди чисел на доске есть хотя бы 75 чисел, делящихся на p^k ; в начале таких $\lfloor 2100/p^k \rfloor$. Значит, $a_{2026} p^k \iff 2100/p^k \geq 75 \iff p^k \leq 28$.

Отсюда простые степени, входящие в a_{2026} :

$$2^4, 3^3, 5^2, 7, 11, 13, 17, 19, 23,$$

то есть

$$a_{2026} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23.$$

Тогда число делителей равно

$$(4 + 1)(3 + 1)(2 + 1) \cdot 2^6 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 64 = 3840.$$

Задача 5.

Последовательность Рона Грэма $(a_n)_{n \geq 1}$ определяется так. Для каждого натурального числа n положим a_n равным наименьшему натуральному числу m , для которого существует конечная строго возрастающая последовательность натуральных чисел

$$n = b_1 < b_2 < \dots < b_t = m,$$

такая, что произведение $b_1 b_2 \dots b_t$ является точным квадратом, то есть квадратом целого числа.

Например, $a_2 = 6$, потому что $2 \cdot 3 \cdot 6$ — точный квадрат, тогда как ни одно из чисел

$$2, \quad 2 \cdot 3, \quad 2 \cdot 4, \quad 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad 2 \cdot 5, \quad 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 2 \cdot 4 \cdot 5, \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

не является точным квадратом. Также $a_4 = 4$, так как можно взять $t = 1$ и $b_1 = 4$.

Докажите, что каждое не простое натуральное число (то есть число 1 и любое составное число) встречается в последовательности (a_n) , притом ровно один раз.

Решение:

Единственность. Пусть для некоторых $k < \ell$ выполнено $a_k = a_\ell = m$. Тогда существуют две последовательности

$$k = b_1 < b_2 < \dots < b_s = m, \quad \ell = c_1 < c_2 < \dots < c_t = m,$$

притом $b_1 \dots b_s$ и $c_1 \dots c_t$ — точные квадраты. Тогда и произведение $(b_1 \dots b_s) \cdot (c_1 \dots c_t)$ — точный квадрат. Выкидывая из последнего произведения множители, встречающиеся как в b_i , так и в c_j , получим новую последовательность

$$k = d_1 < d_2 < \dots < d_q < m,$$

притом произведение $d_1 \dots d_q$ — точный квадрат. Противоречие с определением a_k .

Существование. Для 1 подойдёт a_1 . Пусть теперь m — некоторое составное число. Пусть p_1, \dots, p_k — все простые, входящие в разложение m в нечётной степени (возможно, $k = 0$). Тогда для последовательности

$$p_1 < p_2 < \dots < p_k < m$$

произведение $p_1 p_2 \dots p_k m$ — точный квадрат. Если $a_{p_1} = m$, то вот и доказано существование. Иначе $a_{p_1} = \ell < m$ и существует последовательность

$$p_1 < b_2 < \dots < b_t = a_{p_1} < m$$

такая, что $p_1 b_2 \dots b_t$ — точный квадрат. Тогда и произведение $(p_1 p_2 \dots p_k m) \cdot (p_1 b_2 \dots b_t)$ — точный квадрат. Выкинем из него все числа, встречающиеся по два раза (в частности, p_1 мы выкинем, а m — нет). Получим новую последовательность

$$p_1 < c_1 < \dots < c_t = m,$$

для которой $c_1 \dots c_t$ — точный квадрат. Если $a_{c_1} = m$, то вот и существование. Иначе повторим процесс. Процесс закончится, т.к. каждый раз мы увеличиваем наименьшее число, а они ограничены числом m .