**Задача 1.**

Действительные числа $a$, $b$ и $c$ не меньше 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a+\frac{b}{c}}+\frac{1}{1+b+\frac{c}{a}}+\frac{1}{1+c+\frac{a}{b}}\leqslant 1.$$

**Задача 2.**

Дан треугольник $ABC$. На стороне $BC$ отмечена её середина $M$. На сторонах $AB$ и $AC$ выбраны точки $P$ и $Q$ соответственно так, что

$$\angle PMB=\angle QMC=\frac{1}{2}\angle BAC.$$

Найдите длину отрезка $BP$, если $AP=1$, $AQ=3$, а $BC=8$.

**Задача 3.**

В круговом турнире участвуют $n$ игроков: каждый играет с каждым ровно один раз, и в каждом матче один игрок выигрывает, а другой проигрывает. Если игрок $A$ победил игрока $B$, будем называть $B$ *жертвой* игрока $A$.

По окончании турнира каждый игрок подсчитывает суммарное число поражений, которые в турнире потерпели все его жертвы. Пусть $q$ — среднее значение этой суммы по всем игрокам.

Докажите, что существует игрок, у которого не более $[\sqrt{q}]$ побед. Как обычно, для действительного числа $x$ через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее $x$.

**Задача 4.**

На доске исходно записаны числа $1, 2, \ldots, 2100$. За одно действие Жора выбирает два числа $a$ и $b$ на доске такие, что ни одно из них не делится на другое, стирает их и вместо них записывает НОД$(a,b)$ и НОК$(a,b)$. Когда подходящей пары чисел на доске больше не оказалось, Жора закончил. После этого он выписал все полученные числа в порядке неубывания:

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_{2100}.$$

Найдите, чему может быть равно количество натуральных делителей числа $a_{2026}$.

**Задача 5.**

Для каждого натурального числа $n$ положим $a_n$ равным наименьшему натуральному числу $m$, для которого существует конечная строго возрастающая последовательность натуральных чисел

$$n=b_1<b_2<\ldots<b_t=m,$$

такая, что произведение $b_1b_2\ldots b_t$ является точным квадратом, то есть квадратом целого числа.

Например, $a_2=6$, потому что $2\cdot3\cdot6$ — точный квадрат, тогда как ни одно из чисел

$$2,\quad 2\cdot3,\quad 2\cdot4,\quad 2\cdot3\cdot4,\quad 2\cdot5,\quad 2\cdot3\cdot5,\quad 2\cdot4\cdot5,\quad 2\cdot3\cdot4\cdot5$$

не является точным квадратом. Также $a_4=4$, так как можно взять $t=1$ и $b_1=4$.

Докажите, что каждое не простое натуральное число (то есть число 1 и любое составное число) встречается в последовательности $(a_n)$, притом ровно один раз.