В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешается). Оформление может не соответствовать версии, использованной на олимпиаде.

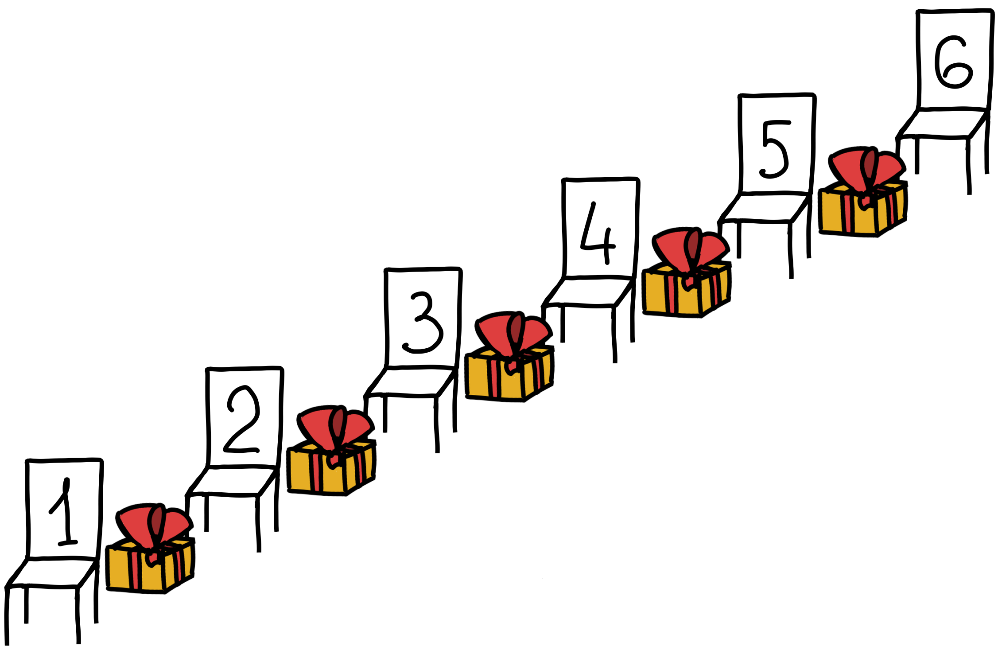
1 (6). В городе Честервилле солнце светит нечасто: среди любых пяти дней подряд есть хотя бы четыре пасмурных. Зато среди любых шести дней подряд найдётся хотя бы один солнечный. Сколько солнечных дней может быть в Честервилле в сентябре? Укажите все возможные варианты.

Ответ. 5 или 6.

Решение. В сентябре 30 дней. Разобьём их на 6 промежутков по 5 дней. По условию в каждом промежутке есть хотя бы 4 пасмурных дня, то есть не более одного солнечного. Значит, всего солнечных дней в сентябре не более 6. Теперь разобьём 30 дней на 5 промежутков по 6 дней. В каждом из них найдётся хотя бы один солнечный день, поэтому всего солнечных дней в сентябре хотя бы 5.

Ровно 6 солнечных дней в сентябре может быть, если каждый пятый день (например, 5, 10, 15, 20, 25 и 30 сентября) будет солнечным, а остальные – пасмурными; ровно 5 солнечных дней может быть, если солнечным будет только каждый шестой день (например, 6, 12, 18, 24 и 30 сентября). Легко убедиться, что все условия в этих случаях соблюдены.

2 (6–7). Друг за другом стоят шесть стульев, между каждыми двумя соседними стульями на полу лежит по одному подарку (см. рисунок).



На четырёх стульях сидят Аня, Оля, Коля и Боря, все смотрят в одном направлении. Они сказали следующее:
Аня: «Впереди меня подарков больше, чем позади.»
Оля: «Позади меня подарков больше, чем впереди.»
Коля: «Между Олей и Борей столько же подарков, сколько между мной и Аней.»

Боря: «Можно убрать один из подарков впереди меня так, что все наши утверждения станут неверны.»
Известно, что все дети сказали правду. Кто на каком стуле сидит?

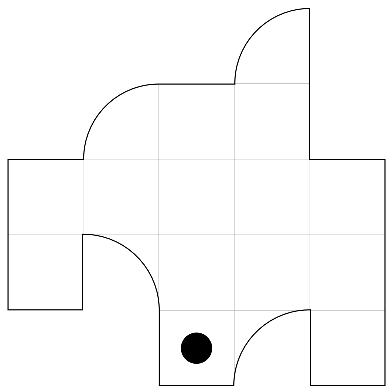
Ответ. Аня – на стуле 4, Оля – на 3, Коля – на 6, Боря – на 5.

Решение. Посмотрим, сколько подарков может быть впереди Ани. Поскольку перед ней подарков больше, чем за ней – их не меньше трёх. Но Боря говорит, что можно убрать один подарок так, что утверждение Ани станет неверным, значит, подарков перед ней ровно три. Получаем, что Аня сидит на стуле номер 4. Аналогично, позади Оли должно быть ровно три подарка – значит, она сидит на стуле номер 3. Единственный подарок, который можно убрать так, чтобы и утверждение Ани, и утверждение Оли стали неверными – это лежащий между ними, центральный подарок. И раз Боря говорит про подарок впереди него – то он сидит на одном из двух последних стульев.

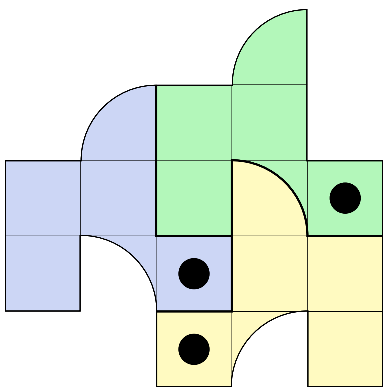
Посмотрим теперь на утверждение Коли. Предположим, что он сидит на одном из двух передних стульев (1 или 2). Тогда центральный подарок лежит как между Колей и Аней, так и между Олей и Борей. Но если этот подарок убрать, то Колино утверждение останется верным: количества подарков и между Колей и Аней, и между Олей и Борей уменьшатся на 1, а значит, останутся равными. Значит, Коля тоже сидит на одном из двух последних стульев. Если Коля сидит на 5 стуле, то между ним и Аней 1 подарок, а между Борей и Олей их 2, и утверждение Коли неверно. Значит, Коля сидит на стуле номер 6, а Боря – на стуле номер 5.

3 (6–8). Петя вырезал из бумаги три одинаковые фигурки, положил их друг на друга так, чтобы их края совпали, и проткнул все три фигурки насквозь. Потом из этих трёх фигурок (возможно, поворачивая или переворачивая их) он сложил большую фигуру, как на рисунке.

Одна из дырок на рисунке отмечена чёрным кружком – выберите ещё две клетки, в которых окажутся дырки.



Ответ. См. рисунок.



4 (7–11). Внутри куба отмечены 10 точек. Жора хочет выбрать натуральное число n и разбить куб на n^3 одинаковых кубиков так, чтобы каждая отмеченная точка оказалась внутри (но не на границе) какого-то кубика. При каком наименьшем M Жора гарантированно сможет выбрать число, не большее M?

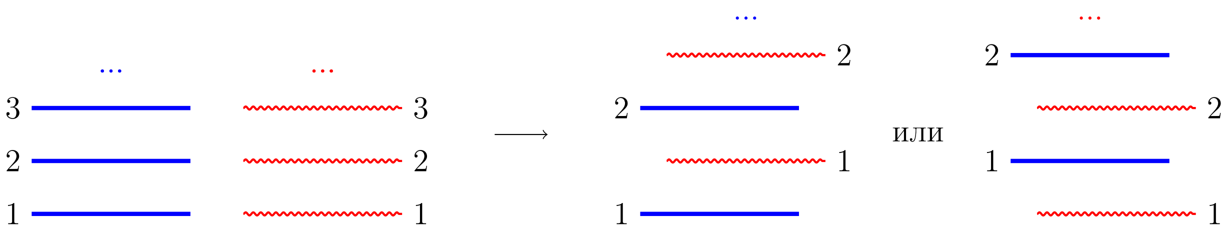
Ответ. 127 (31-е простое число).

Решение. Пусть Жора назвал число n. Будем считать, что сторона большого куба равна 1, одна из его вершин расположена в начале координат, а рёбра идут параллельно осям. Тогда отмеченная точка окажется на границе какого-то маленького кубика, если и только если хотя бы одна из трёх координат этой точки – обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$, где q является делителем n.

Всего у десяти точек 30 координат. Если это $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, ... $\frac{1}{113}$ (то есть, обратные к первым 30 простым числам), то Жора не может назвать число n, кратное 2, или 3, или 5, ..., или 113. Значит, число M не меньше 127 (следующего, 31-го, простого числа).

Если же $M = 127$, то Жора может назвать одно из простых чисел, не больших 127. Действительно, «запретить» простое число n может только рациональная координата со знаменателем n, и 30 координат точек могут в сумме «запретить» не более 30 различных простых чисел. Значит, среди 31 простого числа от 2 до 127 Жора точно сможет выбрать подходящее n.

5 (8–10). На столе лежит колода из 36 карт, верхняя из которых червонный туз. За одно «перемешивание» фокусник снимает верхнюю половину колоды и кладёт рядом с нижней, а затем делает так, чтобы карты двух стопок чередовались: сначала нижняя карта левой или правой стопки, потом первая снизу другой стопки, потом вторая снизу карта первой стопки, вторая снизу карта другой стопки, и так далее (см. рисунок).



Какое наименьшее число перемешиваний нужно сделать фокуснику, чтобы червонный туз оказался нижней картой колоды? При каждом перемешивании то, из какой половины карта окажется снизу, фокусник выбирает сам.

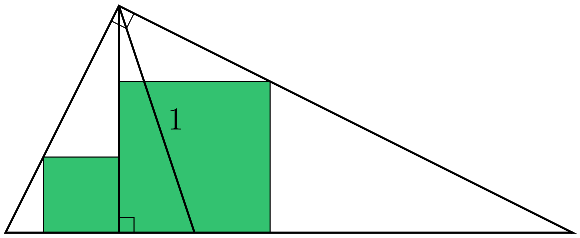
Ответ. 6.

Решение. Если карта из верхней половины колоды была k-й сверху, то после одного перемешивания она станет либо $2k$-й, либо $(2k-1)$-й сверху. А если карта из нижней половины колоды была k-й снизу, то станет либо $2k$-й, либо $(2k-1)$-й снизу. Таким образом, если карта находилась в верхней половине колоды, то после перемешивания она окажется ниже или (если это была верхняя карта) на том же месте, а если карта находилась в нижней половине, то окажется выше или (если это была нижняя карта) на том же месте. Значит, впервые попасть на нижнее место в колоде червоный туз может только из верхней половины колоды (а именно, если перед перемешиванием он был 18-й сверху картой).

После каждого перемешивания номер червонного туза, считая сверху, мог увеличиться максимум вдвое, значит, после 4 перемешиваний червонный туз окажется не более чем 16-й сверху картой, и после следующего перемешивания в любом случае не станет самой нижней картой.

А вот 6 перемешиваний хватит: пусть фокусник сделает так, чтобы после первого перемешивания снизу оказалась карта из верхней половины колоды (червоный туз станет 2-й сверху картой), после второго, третьего и четвёртого перемешиваний – из нижней (червоный туз станет 3-м сверху, затем 5-м, затем 9-м), после пятого и после шестого перемешивания – снова из верхней половины (туз станет 18-м сверху и, наконец, 36-м сверху).

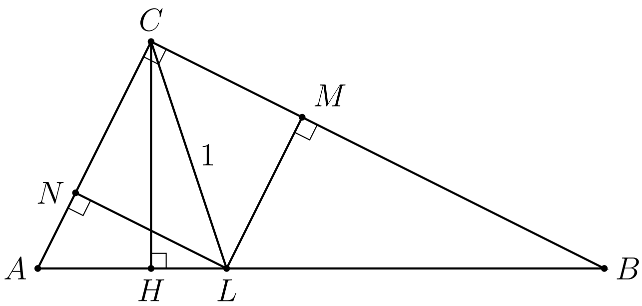
6 (9–11). Из прямого угла прямоугольного треугольника опущена высота, и в образовавшиеся треугольники вписаны два квадрата (как на рисунке).



Чему может быть равна сумма площадей этих квадратов, если длина биссектрисы прямого угла треугольника равна 1?

Ответ. $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

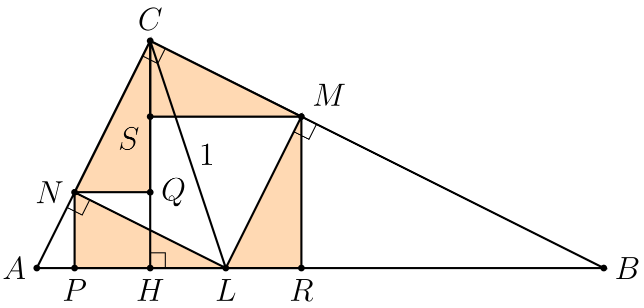
Решение 1. Опустим из основания биссектрисы перпендикуляры на стороны большого треугольника и обозначим вершины, как на рисунке.



Поскольку CL – биссектриса, $LN = LM$, а так как угол C прямой, то треугольники CML и CNL – прямоугольные равнобедренные, то есть $CMLN$ – квадрат.

Опустим теперь перпендикуляры из точек N и M на AB и CH. Закрашенные на рисунке ниже треугольники равны по гипотенузе (стороне квадрата $CMLN$) и острому углу, так как

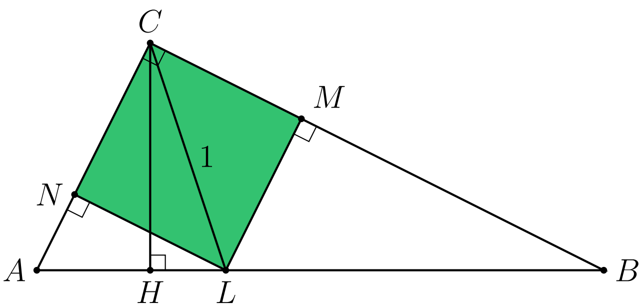
$$\angle NCQ = 90^\circ - \angle SCM = \angle CMS = 90^\circ - \angle SML = \angle LMR = 180^\circ - 90^\circ - \angle MLR = \angle NLP.$$



Это, в частности, означает, что $NQHP$ и $SMRH$ – квадраты, причём это в точности вписанные в треугольники ACH и BCH из условия задачи!

Остаётся заметить, что их суммарная площадь равна $NP^2+HR^2 = NP^2+PL^2 = NL^2$, а NL – сторона квадрата с диагональю 1. Значит, $NP^2 + HR^2 = NL^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Решение 2. Опустим из основания биссектрисы перпендикуляры на стороны большого треугольника и обозначим вершины, как на рисунке.



Поскольку CL – биссектриса прямого угла, то $CMNL$ – квадрат. Пусть S – площадь этого квадрата. Прямоугольные треугольники ACH, CBH и ABC подобны по двум углам. Площади квадратов, вписанных в прямые углы этих треугольников, относятся, как квадраты коэффициентов подобия. Значит, сумма площадей двух меньших квадратов равна

$$S \cdot \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + S \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = S \cdot \frac{(AC^2+BC^2)}{AB^2} = S.$$

Диагональ квадрата площади S – это биссектриса CL, и она равна 1. Значит, сторона большого квадрата равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а его площадь $S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Поэтому сумма площадей двух меньших квадратов тоже равна $\frac{1}{2}$ и не зависит от углов исходного треугольника.

Замечание. Решение 2 не использует тот факт, что точки N и M также являются вершинами данных в задаче квадратов.

7 (10–11). На микросхеме 2025 различных элементов, некоторые пары из которых соединены проводами. Жора хочет раскидать элементы по n платам так, чтобы никакие два элемента одной платы не были соединены проводами. Жора посчитал, что если плат будет всего две, то у него будет 2 способа, а если плат 2025 – то $2025 \cdot 2024^{2024}$ способов. Сколько проводов на микросхеме? *Все элементы и все платы разные, какие-то из плат могут не содержать элементов. Способы считаются разными, если хотя бы один элемент в способах находится на разных платах.*

Ответ. 2024 провода.

Решение. Что можно сказать про граф, образованный элементами и проводами?

Из того, что для двух плат способов 2, следует, что этот граф связный. Действительно, если граф распадается на несколько частей, то общее количество способов равно произведению количеств способов для каждой из частей. Но количество способов для каждой части чётно, поскольку можно поменять наборы элементов на двух платах местами (также и для n плат количество способов всегда делится на n, так как можно переставить наборы элементов по платам по циклу).

Подумаем теперь про размещения на 2025 платах. Первый элемент можно разместить на любой из 2025 плат. Элемент, связанный с первым, можно разместить на любой из 2024 оставшихся плат. Будем и дальше добавлять по одному элементу, связанному с каким-либо из предыдущих (это возможно в силу связности графа!). Каждый раз для нового элемента доступны не более 2024 плат (хотя бы с одним уже размещенным элементом он связан). Получается, что способов разместить 2025 элементов на 2025 платах для любого связного графа не больше, чем $2025 \cdot 2024^{2024}$.

Когда достигается равенство? Если каждый новый элемент всегда можно поместить на любую из 2024 плат, то соединённые с ним старые (уже размещённые) элементы должны лежать на одной и той же плате. Если с новым элементом соединено два и более старых, то на предыдущем шаге можно было бы один из этих старых элементов поставить на свободную плату (такая найдётся, поскольку и плат, и элементов по 2025, а элементы пока расставлены не все), но тогда для нового элемента было бы уже меньше 2024 доступных способов расстановки. Значит, каждый новый элемент связан ровно с одним из уже распределённых по платам.

Итак, наш граф получается, если начинать с одного элемента, а потом 2024 раза добавить по одному элементу с ровно одним проводом. Значит, всего проводов будет 2024. (А граф будет являться *деревом*... впрочем, про это в задаче не спрашивали.)

Комментарий. Для любого графа с n вершинами количество способов «раскидать элементы по x платам так, чтобы никакие две вершины с одной платы не были соединены» является многочленом от x степени n. Этот многочлен называют *хроматическим многочленом графа* (название связано с тем, что вместо распределения по платам обычно говорят про раскрашивание вершин в разные цвета). По этому многочлену можно восстановить некоторые свойства графа. Например, граф является деревом тогда и только тогда, когда его хроматический многочлен равен $x(x-1)^{n-1}$.

Критерии.

1. Текстовое решение отсутствует — **0 баллов**
2. В поле для числового ответа введён неверный ответ — **0 баллов**
3. Утверждается, что граф элементов и проводов полный или полный двудольный — **0 баллов**

4. Рассмтаривается только конкретное сочетание элементов и проводов (например, цепочка из элементов и проводов, или один элемент соединён со всеми остальными и больше проводов нет, или граф элементов и проводов — дерево) — **0 баллов**

5. Сформулирован ряд утверждений о хроматическом многочлене или о раскрасках графа, но не объяснено, почему данная задача эквивалентна задаче о раскраске графа — **0 баллов**

Для решений, к которым не применимы критерии 1–5:

6. Правильно доказано, что граф элементов и проводов связен (из отсутствия вершин степени 0 не следует связность графа!), дальнейших продвижений нет — **0.5 балла**;

7. Связность графа элементов и проводов не обоснована или обоснована неверно, но правильно доказано, что при распределении элементов по 2025 платам способов не больше, чем $2025 \cdot 2024^{2024}$, при этом то, что проводов 2024, не обосновано или обосновано неверно — **0.5 балла**;

8. Верно доказаны связность графа элементов и проводов и то, что при распределении элементов по 2025 платам способов не больше, чем $2025 \cdot 2024^{2024}$, но то, что проводов ровно 2024, не обосновано или обосновано неверно — **1 балл**;

9. Решение опирается на связность графа элементов и проводов, но сама связность не доказана или доказана неверно — *при в остальном верном решении* **1 балл**;

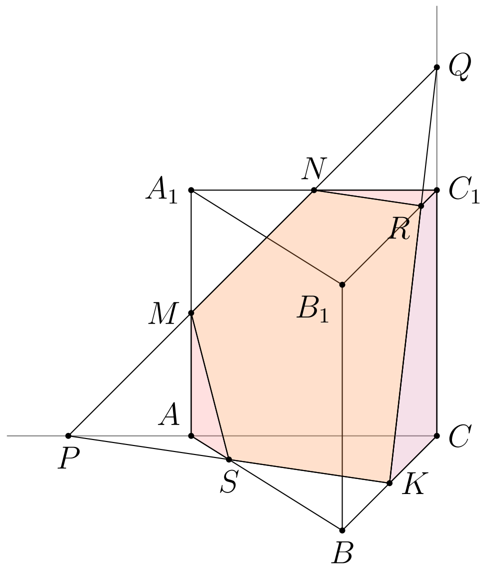
10. Верное доказана связность графа элементов и проводов; далее утверждается, что при наличии цикла при последовательном распределении его вершин по платам последнюю вершину в цикле всегда можно расставить 2023 способами — *при в остальном верном решении* **1,5 балла**;
    (это, вообще говоря, неверно — если первая и предпоследняя расставленные вершины цикла оказались на одной плате, то для последней вершины будет 2024 способа)

11. При недостатке пояснений при обосновании того или иного утверждения в решении снимается от 0,5 балла;

12. Полное верное решение — **2 балла**.

8 (11). Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Чему равно отношение объёмов (меньшего к большему), в котором призму делит плоскость, проходящая через середины рёбер AA_1, A_1C_1 и BC, если длины этих рёбер равны?

Ответ. $\frac{49}{95}$



Решение. Пусть M, N и K – середины рёбер одинаковой длины AA_1, A_1C_1 и BC. Построим сечение нашей призмы плоскостью. Для этого проведём прямую MN до пересечения с продолжениями рёбер AC и CC_1 в точках P и Q, а затем проведём прямые KP и KQ (см. рисунок). Получим пятиугольное сечение $MNRKS$.

Чтобы узнать отношение объёмов, вычислим сначала объём одной из частей как разности треугольной пирамиды $CQPK$ и треугольных пирамид $QNRC_1$ и $PMAS$.

Из условия следует, что две боковые грани призмы AA_1C_1C и BB_1C_1C – квадраты. Пусть их стороны равны $4a$, тогда $PA = NC_1 = QC_1 = CK = 2a$. Треугольники RQC_1 и KQC подобны с коэффициентом $\frac{QC_1}{QC} = \frac{1}{3}$, поэтому $RC_1 = \frac{2}{3}\,a$. Если в треугольнике ABC провести среднюю линию через KL параллельно AB, получим $AS = \frac{1}{2}\,KL = \frac{1}{4}\,AB$.

Объём треугольной пирамиды $CQPK$ равен

$$V = \frac{1}{6} \cdot CQ \cdot CP \cdot CK = \frac{1}{6} \cdot 6a \cdot 6a \cdot 2a = 12a^3;$$

объём пирамиды $PMAS$, вершины M, A и S которой расположены на рёбрах того же трёхгранного угла с вершиной P, равен

$$V \cdot \frac{PS}{PK} \cdot \frac{PA}{PC} \cdot \frac{PM}{PQ} = V \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,a^3;$$

объём пирамиды $QNRC_1$ равен

$$\frac{1}{6} \cdot C_1Q \cdot C_1N \cdot C_1R = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3}\,a = \frac{4}{9}\,a^3.$$

Итак, одна из двух частей, на которые плоскость PQK делит призму, имеет объём

$$12a^3 - \frac{2}{3}\,a^3 - \frac{4}{9}\,a^3 = \frac{98}{9}\,a^3.$$

Объём всей призмы равен $\frac{1}{2}\,4a \cdot 4a \cdot 4a = 32a^3$, поэтому объём оставшейся части равен

$$32a^3 - \frac{98}{9}\,a^3 = \frac{190}{9}\,a^3.$$

Таким образом, отношение объёмов меньшей части к большей равно $\frac{98}{190} = \frac{49}{95}$.